DAS GEBURTSTAGSPARADOXON

Stell Dir vor, Du siehst ein Fußballspiel. In jeder Mannschaft sind 11 Spieler und es gibt einen Schiedsrichter. Zusammen auf einem Spielfeld oder in einem Raum sind das also 23 zufällig ausgewählte Personen.

Frage:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 23 Personen in einem Raum mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Hinweis:

- Es wird nach mindestens zwei beliebigen Personen aus der Gruppe gefragt, die an irgendeinem beliebigen Tag gemeinsam Geburtstag haben.

Voraussetzungen/Annahmen:

- Der Einfachheit halber geht man davon aus, dass jedes Jahr einheitlich 365 Tage hat, d. h. Schaltjahre werden ignoriert.
- Alle 365 Tage eines Jahres sind als Geburtstage gleich wahrscheinlich.
- Berücksichtigt werden beim Geburtstag nur der Tag und der Monat, nicht das Geburtsjahr.
- Es sind keine Zwillinge oder Mehrlinge in der Gruppe.

Das Ergebnis lautet:

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 50,73%

Wie kommt man darauf?

Ist doch klar: Voll einfach! ... Zumindest für ein Mathe-Genie, wie es unser Könnerkind Jonas ist. Die Maus musste hingegen erst ein bisschen nachdenken, um auf einen Rechenweg zu kommen. Denn um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, müssten alle denkbaren Kombinationen berücksichtigt werden. Zum einen könnten genau zwei Spieler bzw. Personen denselben Geburtstag haben. Es ist aber auch möglich, dass es drei/vier/fünf ... Personen mit demselben Geburtstag gibt. Oder zwei/drei/vier ... Spielerpaare mit unterschiedlichen, aber paarweise identischen Geburtstagen. Zwar unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen ist auch der Fall, dass sogar alle 23 Spieler am selben Tag Geburtstag feiern. Tja, und nun? Der Griff in die Trickkiste!

Es gibt einen Trick, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oftmals weiterhilft. Wir berechnen einfach die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils: und zwar, dass alle 23 Spieler an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben. Wenn wir diese Wahrscheinlichkeit (Zahl) von 100 Prozent abziehen, haben wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Der Rechenweg

So, dann geht's mal los. Wir entnehmen der Gruppe den ersten Spieler. Dieser kann an jedem beliebigen Tag im Jahr Geburtstag haben, also an 365 Tagen. Wir entnehmen der Gruppe die zweite Person. Für diese bleiben dann noch 364 Tage übrig. Sie soll ja schließlich nicht am selben Tag feiern, wie die erste Person. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei Geburtstage nicht identisch sind, ist deshalb 364/365. Für die nächste Person sind noch 363 von 365 Tagen übrig. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person also an einem der anderen 363 Tage Geburtstag hat, an denen die beiden anderen Personen nicht Geburtstag haben, ist 363/365 und so weiter. Für die letzte, also 23. Person, sind noch 343 von 365 Tagen übrig. Die Wahrscheinlichkeit, dass die 23. Person an einem anderen Tag Geburtstag hat, als die anderen 22 Personen, ist deshalb 343/365. Nach den Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten multipliziert man nun noch alles miteinander. Dann erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 23 Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Klingt komisch, ist aber so! Und so sieht das dann ausgerechnet aus:

Die Rechnung

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \times \frac{360}{365} \times \frac{359}{365} \times \frac{358}{365} \times \frac{357}{365} \times \frac{356}{365} \times \frac{355}{365} \times \frac{354}{365} \times \frac{353}{365} \times \frac{352}{365} \times \frac{351}{365} \times \frac{350}{365} \times \frac{349}{365} \times \frac{348}{365} \times \frac{347}{365} \times \frac{346}{365} \times \frac{345}{365} \times \frac{344}{365} \times \frac{343}{365}$$

≈ 0.4927

Umgerechnet in Prozent sind das 49.27 %

Dies bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 49,27 Prozent alle 23 Spieler an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben.
Wenn wir diese Zahl von 100 Prozent abziehen, haben wir ENDLICH die von uns gesuchte Zahl:
100 % - 49.27 % = 50.73 %

Antwort:

Das bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50,73 Prozent unter 23 Personen in einem Raum mindestens zwei sind, die am gleichen Tag ihren Geburtstag feiern.